فرآیندهای تصادفی
زنجیرهٔ مارکوف

محسن هوشمند
دانشکده تکنولوژی اطلاعات و علم رایانه
دانشگاه تحصیلات تکمیلی علوم پایه زنجان

مقدمه و شرح مسئله

وجود فرایندی دارای مقدار در هر گام از زمان

X_n نمایش مقدار آن در زمان n

به دنبال ساخت مدل احتمالی از دنباله مقادیر متوالی $X_0, X_۱, X_۲, \ldots$

ساده‌ترین مدل؟

- X_n-ها متغیرهای تصادفی مستقل از هم
  - معمولا فرضی غیرموجه
  - مثال- X_n نمایش قیمت سهمی از اوراق بهادار شرکتی چون دیجی‌کالا در پایان روز n معاملات
    - آن‌گاه غیرمعقولی فرض استقلال قیمت در پایان روز تجاری $n + ۱$ از قیمت‌های روزهای $n - ۱$ و $n - ۲$ و … و 0

در عوض، معقول بودن فرض وابستگی قیمت در پایان روز تجاری $n + ۱$ به قیمت‌های پایانی قبلی از طریق قیمت پایانی روز n

فرض وابستگی توزیع شرطی $X_{n+۱}$ با داشتن تمامی قیمت‌های پایانی قبلی $X_0, X_۱, X_۲, \ldots, X_n$ وابسته به قیمت پایانی روز n

- فرض مذکور معرفی نوعی فرایند تصادفی با نام «زنجیره مارکوف»

از کجا آمده‌ام،آمدنم بهر چه بود!

مارکوف کیست؟!

زنجیرش را کجا بافت!!

پوشکین چکاره است؟

چه شد که این‌طور شد؟

از کجا آمده‌ام،آمدنم بهر چه بود!

اندری اندرویچ مارکوف

- ۱۸۵۶ تا ۱۹۲۲ مسیحی
- دانشجو در سن‌پترزبورگ
  - کار با چبیشف
  - کسب دکتری در سال ۱۸۸۴
- استاد در دانشگاه پترزبورگ
- آکادیمیسین آکادمی علوم
- بازنشستگی در سن ۴۹ سالگی ۱۹۰۵
- انجام مشهورترین کارهایش پس از بازنشستگی

از کجا آمده‌ام،آمدنم بهر چه بود!

ادامهٔ تحقیقات در امتداد کار چبیشف روی قاعدهٔ اعداد بزرگ

مربوط با مسئله‌های کوزهٔ (گلدان) برنولی

- Bernoulli urn Prbs.
  - عدم صفحه ویکی‌پدیای فارسی

مخالفت شدید با نکراسوف

قانون اعداد بزرگ

متغیر تصادفی X

فرض امید آن برابر E[X]

- نزدیک‌تر شدن میانگین نتایج به امید ریاضی آن

اگر n مشاهده از این متغیر تصادفی بگیریم

$$\overline{X_n} = \frac{X_۱ + \cdots + X_n}{n}$$

قانون اعداد بزرگ

$$\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} \to E[X]$$

مثال- X تعداد شیرهای حاصل از ۱۰۰ بار پرتاب سکهٔ سالم

- $E[X] = ۰.۵ * ۱۰۰ = ۵۰$
- $\overline{X_n} = \frac{۵۶+۶۷+۴۴+\cdots+X_n}{n}$
- $\lim_{n\to\infty} \overline{X_n} \to ۵۰$

اشتباه قمارباز

نکراسوف و ارادهٔ آزاد

اعمال داوطلبانه بدون ارتباطات علی انجام می‌شوند

- همانند آزمایش‌های مستقل در نظریهٔ احتمال

قانون اعداد بزرگ یا قضیه حد مرکزی صرفا در پدیده‌های مستقل مشاهده می‌شود

قانون اعداد بزرگ در آمار اجتماعی نیز مشاهده شده است

بنابراین افراد آزادانه و با ارادهٔ آزاد عمل می‌کنند.

مخالفت مارکوف

هدف

- استقلال برای قانون اعداد بزرگ لازم نیست

۱۹۰۶

- یافتن اولین مدل خاص که قانون اعداد بزرگ برای متغیرهای وابسته و غیرمستقل نیز جاری و ساری است

۱۹۰۷- ۱۹۱۱

- تعمیم مدل به انواع مختلفی و وسیع‌تری از نظام‌ها

۱۹۱۳

- اعمال مدل به تحلیل لغوی رمان «یوگینی آنگین»
  - نویسنده: پوشکین

استقلال کمیت‌ها جزو سازندۀ شرط لازم برای وجود قانون اعداد بزرگ نیست

- جدید بود؟
- نشانه‌های قبلی
  - مطالعات فرما و پاسکال دربارۀ پاکباختگی قمارباز
  - بعضی مدل کوزه‌های دانیال برنولی
  - فرایند شاخه‌زنی گالتون-واتسن
    - بدون جلب توجه فراوان
    - استقلال خوب جواب می‌داد و نیازی به بررسی وابستگی نبود
  - نبود رایانش ماشینی
    - مارکوف کاربردی نبود

پروژهٔ «آنگین» مارکوف

اشارهٔ پوشکین در کتاب یوگنی آنگین به سعدی

«بعضی‌ها از این دنیا رفته‌اند و بعضی‌ها در مسافرت دور و دراز هستند، چنان‌که سعدی در زمان خود گفته بود.»

منظور پوشکین اشعار زیر

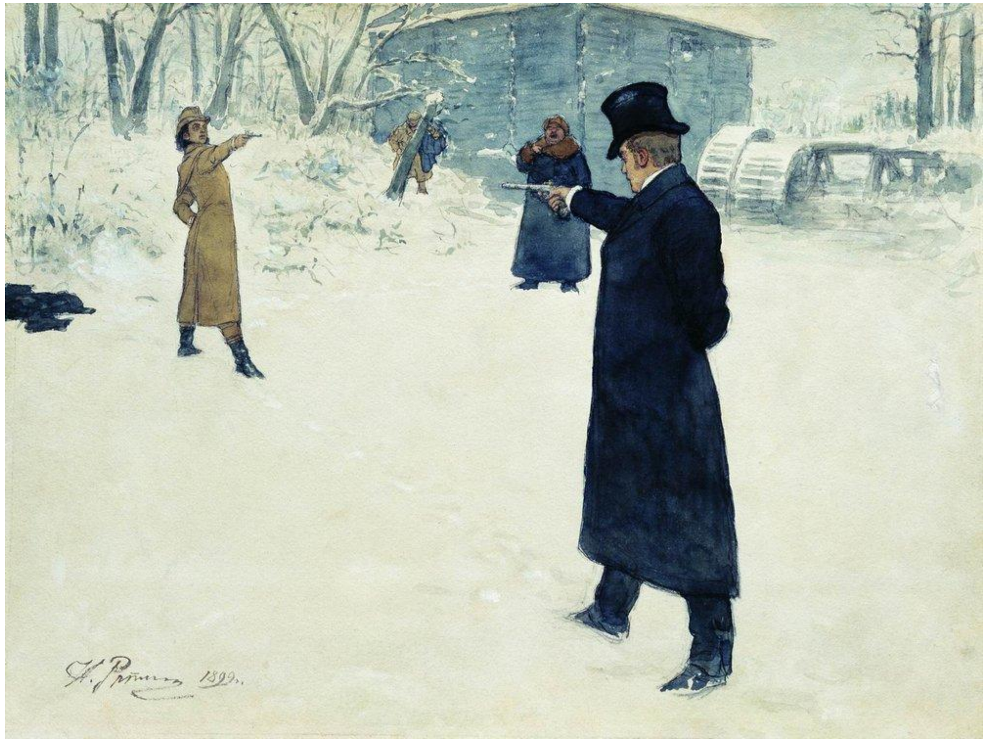
شنیدم که جمشید فرخ‌سرشت

به سرچشمه‌ای بر، به سنگی نوشت:

«بر این چشمه چون ما بسی دم زدند

برفتند، چون چشم برهم زدند»

https://fa.wikipedia.org/wiki/%DB%8C%D9%88%DA%AF%D9%86%DB%8C_%D8%A2%D9%86%DA%AF%DB%8C%D9%86#/media/%D9%BE%D8%B1%D9%88%D9%86%D8%AF%D9%87:Yevgeny_Onegin_by_Repin.jpg



پروژهٔ «آنگین» مارکوف

جمع‌آوری بیست‌هزار نویسه‌های نسخهٔ کتاب

حذف علائم سجاوندی و فاصله‌ها

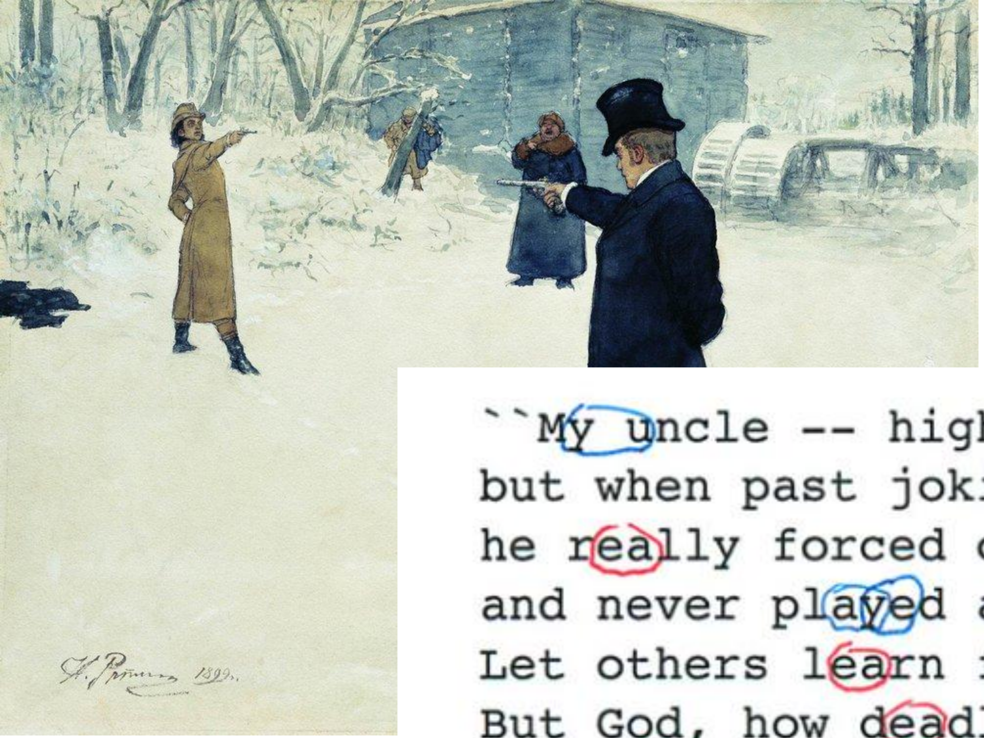
شمردن مصوت‌ها و صامت‌ها

شمارش جفت‌ها «م‌ص» و «ص‌م» و «ص‌ص» و «م‌م»

محاسبهٔ گشتاورها (میانگین و وردائی)

https://fa.wikipedia.org/wiki/%DB%8C%D9%88%DA%AF%D9%86%DB%8C_%D8%A2%D9%86%DA%AF%DB%8C%D9%86#/media/%D9%BE%D8%B1%D9%88%D9%86%D8%AF%D9%87:Yevgeny_Onegin_by_Repin.jpg

پروژهٔ «آنگین» مارکوف



``My uncle -- high ideals inspire him;
but when past joking he fell sick,
he really forced one to admire him --
and never played a shrewder trick.
Let others learn from his example!
But God, how deadly dull to sample
sickroom attendance night and day
and never stir a foot away!
And the sly baseness, fit to throttle,
of entertaining the half-dead:
one smoothes the pillows down in bed,
and glumly serves the medicine bottle,
and sighs, and asks oneself all through:
"When will the devil come for you?"''

جمع‌آوری بیست‌هزار نویسه‌ها

حذف علائم سجاوندی و فاصل

شمردن مصوت‌ها و صامت‌ها

شمارش جفت‌ها «مص» و «ص

محاسبهٔ گشتاورهای (میانگیز

https://fa.wikipedia.org/wiki/%DB%8C%D9%88%DA%AF%D9%86%DB%8C_%D8%A2%D9%86%DA%AF%DB%8C%D9%86#/media/%D9%BE%D8%B1%D9%88%DA%98%D9%87:Yevgeny_Onegin_by_Repin.jpg

نظریه اطلاعات شانون

- استفاده از زنجیره مارکوف در تعریف انتروپی زبان
- ۱۹۴۸

مونتی کارلو زنجیره مارکوف

- MCMC

البته عنوانش در مقاله متروپولیس نیامده

اولین بار در سال ۱۹۶۴

- فصلی از کتاب

کلین‌راک

زنجیره مارکوف با زمان گسسته

زمان گسسته با اندیس $n = 0,۱,۲, \ldots$

X_n نمایشگر حالت در زمان n

$\{X_n, n = 0,۱,۲, \ldots\}$ فرایندی تصادفی

- مقدارگیری X_n از مجموعه‌ای مقادیر متناهی یا شمارا

$X_n = i$

- فرایند در حالت i در زمان n

ویژگی‌ها و جزئیات

با داشتن X_n، تمامی زمان‌های قبلی بی‌تاثیر بر ارزیابی آیندهٔ فرایند

بنابراین با مشاهدهٔ خاصیت مارکوفی و هر $m > 0$:

$$\forall n \geq 1, i, j, X_k = i_k, k = 0, \dots, n-1$$

$$P(X_{n+m} = j | X_n = i, X_{n-۱} = i_{n-۱}, X_{n-۲} = i_{n-۲}, X_{n-۳} = i_{n-۳}, \dots, X_0 = i_0)$$
$$= P(X_{n+m} = j | X_n = i)$$

احتمال انتقال تک-مرحله (احتمال انتقال)

- استقلال احتمالات تک-مرحله از متغیر زمان n
  - $P_{ij}^{n,n+1} = P_{ij}$
- ثابت⟸زم تغییرناپذیر با زمان (ایستا)

$$P(X_{n+۱} = j | X_n = i\ ) = P(X_۱ = j | X_0 = i) = P_{ij}$$

- احتمال P_{ij}
  - $P_{ij} \geq 0$ و $\forall i: \sum_{j=0}^{+\infty} P_{ij} = 1$
  - احتمالات شرطی برآورده کنندهٔ اصل‌آغازه‌های کولمولگروف

نمایش ماتریسی زنجیره مارکوف

ماتریس احتمال انتقال P

- جمع کردن P_{ij}

$$P=\begin{bmatrix} P_{00} & P_{0۱} & P_{0۲} & \cdots & P_{0j} & \cdots \\ P_{۱0} & P_{۱۱} & P_{۱۲} & \cdots & P_{۱j} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ P_{i0} & P_{i۱} & P_{i۲} & \cdots & P_{ij} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

معمولا تعداد حالت‌ها متناهی

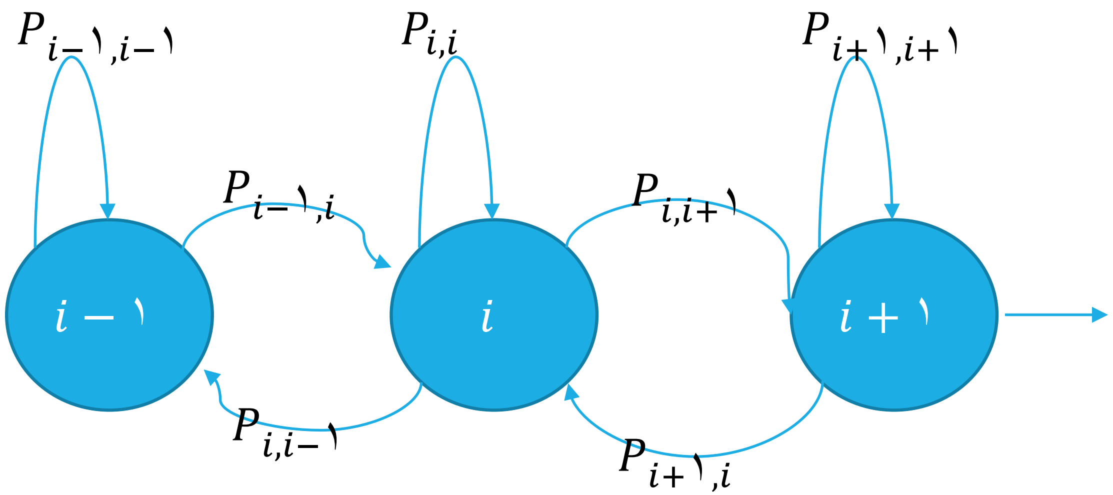
- در غیر این‌صورت ماتریس نیست

شرط‌ها

- $P_{ij} \geq 0$ و $\sum_{j=0}^{+\infty} P_{ij} = 1$
- جمع سطری برابر یک
- شرط اخیر: در هر مرحله حتما انتقالی رخ خواهد داد

نمایش گرافی

نمودار انتقال حالت



مناسب جهت حالت‌های نامتناهی

بدون پیکان هنگام $P_{ij} = 0$

جمع پیکان‌های خروجی از هر حالت باید **برابر** یک

مثال- پیش‌بینی وضع هوا

شانس باران فردا

- صرفا وابسته شرایط جوی امروز
- یا به دیگر سخن وابسته به بارش یا عدم بارش امروزِ باران
- بدون وابستگی به دیروز و روزهای قبل

تعریف احتمال شرطی بارش

- α احتمال بارش فردا به شرط بارش امروز
- β احتمال بارش فردا به شرط عدم بارش امروز

تعریف حالت‌ها

- 0: فرایند در حالت 0 در روز بارش
- ۱: فرایند در حالت ۱ در روز عدم بارش

ایجاد زنجیره مارکوف دو حالتی

احتمال‌های انتقال

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \alpha & ۱-\alpha \\ \beta & ۱-\beta \end{bmatrix}$$

مثال- دستگاه مخابراتی

دستگاه مخابراتی ارسال‌کنندهٔ بیت 0 یا ۱

ارسال از طریق چندین کانال و محیط

احتمال تغییر بیت از 0 به ۱ و بالعکس

احتمال

- p احتمال عدم تغییر بیت هنگام دریافت در گیرنده
  - فرض احتمال عدم تغییر بیت برای هر دوی ۱ و 0 یکسان

X_n

- ورود بیت به کانال n-اُم
- $\{X_n, n = 0,۱,۲, \ldots\}$

حالت‌ها: دو حالت یا زنجیره مارکوف دوحالتی

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} p & ۱-p \\ ۱-p & p \end{bmatrix}$$

مثال- شاد و معمولی و غمگین

حال و احوال

احتمال

- اگر امروز شاد آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۵ و ۰,۴ و ۰,۱
- اگر امروز معمولی آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۳ و ۰,۴ و ۰,۳
- اگر امروز غمگین آنگاه احتمال شادی و معمولی و غمگینی فردا به ترتیب ۰,۲ و ۰,۳ و ۰,۵

X_n

- نمایشگر حال و احوال مش سکینه
- $\{X_n, n \geq 0\}$

حالت‌ها

- سه حالت یا زنجیره مارکوف سه حالتی
- شاد یا حالت 0 و معمولی یا حالت ۱ و غمگین یا حالت ۲

ماتریس انتقال حالت

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۵ & ۰.۴ & ۰.۱ \\ ۰.۳ & ۰.۴ & ۰.۳ \\ ۰.۲ & ۰.۳ & ۰.۵ \end{bmatrix}$$

مثال- تبدیل فرایندی به زنجیره مارکوفی

عدم بارش امروز وابسته به دو روز قبل

- اگر دو روز قبل دارای بارش باران، بارش باران در فردا با احتمال ۰,۷
- اگر امروز بارانی و دیروز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۵
- اگر امروز بدون باران و دیروز بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۴
- اگر دو روز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۲

زنجیره مارکوف؟

- امکان تبدیل به زنجیره مارکوف
- مشخص شدن وضعیت جوی در هر زمان با آب‌وهوا دیروز و امروز
- یا به دیگر سخن- تعریف حالت‌ها
  - حالت 0 بارش باران امروز و دیروز
  - حالت ۱ عدم بارش باران امروز و بارش باران دیروز
  - حالت ۲ بارش باران امروز و عدم باران دیروز
  - حالت ۳ عدم بارش باران امروز و دیروز

جدول انتقال حالت زنجیره مارکوف چهار حالتی

- نیاز به بررسی <u>دقیق</u> ماتریس

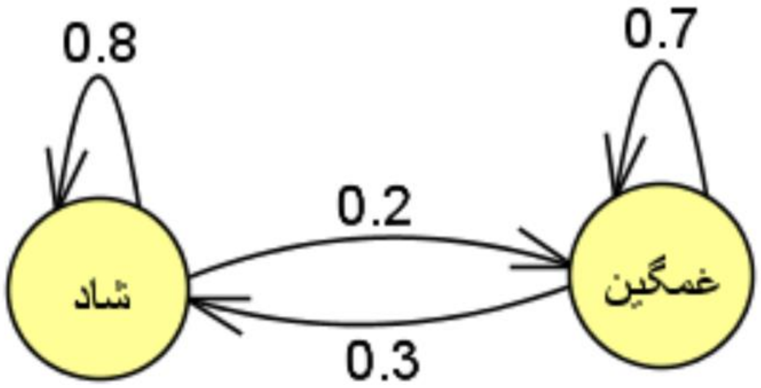
$$P = \begin{bmatrix} ۰.۷ & 0 & ۰.۳ & 0 \\ ۰.۵ & 0 & ۰.۵ & 0 \\ 0 & ۰.۴ & 0 & ۰.۶ \\ 0 & ۰.۲ & 0 & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

مثال- شاد و غمگین

شاد X=0 و غمگین X=1

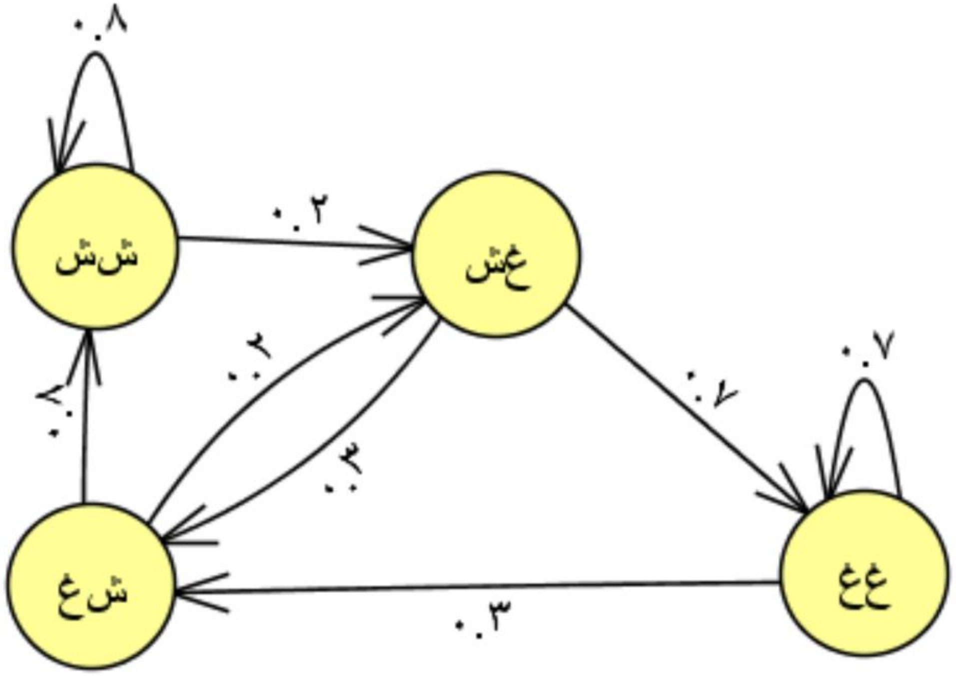
- حال و هوای فردای فرد صرفا از حال و هوای امروز تاثیر می‌پذیرد.

- حالت فردا محتملا شبیه حالت امروز
- ولی غمگین احتمال کمتر برای فردا



$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ \\ ۰.۳ & ۰.۷ \end{bmatrix}$$

مثال- حافظه



حال فردای فرد تحت تاثیر حال امروز و دیروز

- صرفا زنجیره مارکوف نیست

؟

دو حال قبلی تشکیل دهندۀ چهار حالت

- شش
- شغ
- غش
- غغ

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ۰.۳ & ۰.۷ \\ ۰.۸ & ۰.۲ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & ۰.۳ & ۰.۷ \end{bmatrix}$$

حالت‌های بعدی

- شش و شغ تبدیل به شش یا شش غش
- غش و غغ تبدیل به غغ یا شغ

امکان افزودن حافظه با حالت افزوده

مثال- حق بیمه سالانهٔ خودرو

هر بیمه‌شده دارای
- حالت عدد طبیعی
  - بالاتر،پرداخت کمتر
- حق بیمه سالیانه به عنوان تابعی از این حالت
  - به علاوه نوع خودرو و سطح بیمه

تغییر حالت بیمه‌شده در هر سال با ادعای بیمه‌شده
- بدون ادعا کاهش عدد حالت در سال بعد
- حداقل یک ادعا افزایش در سال بعد

ادعای کمتر، بهتر
- منجر به کاهش مبلغ حق بیمه
- ادعای بیشتر، پرداخت مبلغ بیشتر

در نظام پاداش-جریمه Bonus Malus
- ویکی‌پدیا ندارد

https://www.ilna.news/%D8%A8%D8%AE%D8%B4-%D9%81%D8%A7%D8%B1%D8%B3-97/1033029-%D8%AC%D8%A7%DB%8C-%D8%AE%D8%A7%D9%84%DB%8C-%D8%A8%DB%8C%D9%85%D9%87-%D9%87%D8%A7%DB%8C-%D8%B2%D9%86%D8%AF%DA%AF%DB%8C-%D8%AF%D8%B1-%D8%B3%D8%A8%D8%AF-%D8%AE%D8%A7%D9%86%D9%88%D8%A7%D8%B1%D9%87%D8%A7

https://en.wikipedia.org/wiki/Insurance

مثال- حق بیمه سالانهٔ خودرو

$s_i(k)$

- حالت بعدی بیمه‌شده‌ای که در سال پیش
  - در حالت **i**
  - جمع **k** ادعا در آن سال

فرض

- تعداد ادعاهای بیمه شده متغیر تصادفی پواسن با پارامتر λ
- آن‌گاه تشکیل زنجیره مارکوفی از حالت‌های متوالی بیمه‌شده با احتمال انتقال

$$P_{ij} = \sum_{k:s_i(k)=\mathrm{j}} e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, j \geq 0$$

- معمولا دارای حالت‌های فراوان
  - جدول صفحه بعد نظام پاداش-جریمه با چهار حالت

مثال- حق بیمه سالانهٔ خودرو

حالت	مبلغ پرداخت بیمه	حالت بعدی			
		بدون ادعا 0	یک ادعا ۱	دو ادعا ۲	$\geq$ ۳
۱	۲۰۰	۱	۲	۳	۴
۲	۲۵۰	۱	۳	۴	۴
۳	۴۰۰	۲	۴	۴	۴
۴	۶۰۰	۳	۴	۴	۴

$$s_{۲}(0) = ۱$$

فرض بیمه‌شده‌ای دارای توزیع تصادفی در درخواست‌های سالانه با پارامتر λ

- a_k احتمال k ادعا در طول یک سال

$$a_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}, j \geq 0$$

- ماتریس انتقال احتمال

$$P = \begin{bmatrix} a_0 & a_۱ & a_۲ & ۱ - a_0 - a_۱ - a_۲ \\ a_0 & 0 & a_۱ & ۱ - a_0 - a_۱ \\ 0 & a_0 & 0 & ۱ - a_0 \\ 0 & 0 & a_0 & ۱ - a_0 \end{bmatrix}$$

مثال- افتان و خیزان می‌روی

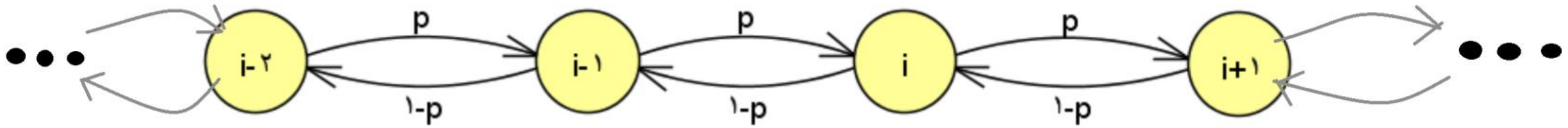
قدم به راست با احتمال $0 < p < ۱$

قدم به چپ با احتمال $۱ - p$

- راه مستقیم نمی‌تواند

حالت‌ها

- $0, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$
- تعداد نامتناهی از حالت‌ها
- احتمال‌های انتقال
  - $P_{i,i+۱} = p$
  - $P_{i,i-۱} = ۱ - p$
  - $P_{i,i+۱} = p = ۱ - P_{i,i-۱}$
  - در غیر این صورت $P_{i,j} = 0$
- گام تصادفی (ولگشت)



ولگشت متناهی! شرطبندی

- با شرط توقف حرکت با رسیدن به حالت‌های $X_n = I$ یا $X_n = 0$
- $X_n = 0$ پاکباخته -وقتی جیبش خالی می‌شود
- $X_n = I$ کل مبلغ را به چنگ می‌آورد
- حالت‌ها تعدادی متناهی $0,۱, \dots ,I$
- احتمالات انتقال
  - $P_{i,i+۱} = p$
  - $P_{i,i-۱} = ۱ - p$
  - $P_{II} = ۱$
  - $P_{00} = ۱$
  - $P_{i,j} = 0$ بقیه انتقال‌ها
- حالت‌های I و 0: حالت مانا (جذب‌کننده، جاذب، گیرا،گیرنده،تله،پایانی؟) ماندن همیشگی در آن به محض رسیدن به این حالت
- حالت گذرا: احتمال ناصفر جهت بازنگشتن به این حالت.
  - یا تعداد برگشت‌های به این حالت نامتناهی نیست.
  - در مقابل: حالت بازگشتی یا پایا: تعداد برگشت نامتناهی به این حالت

ولگشت دوبعدی

قدمی تصادفی در جهت‌های شمال، جنوب، شرق، غرب

- انتخاب جهت با احتمال برابر
- امکان اظهار حالت‌ها با دو تصادفی (X_n, Y_n)
- برد هر یک
  - $X_n = 0, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$
  - $Y_n = 0, \pm ۱, \pm ۲, \ldots$
- احتمال‌های انتقال،صرفا غیر صفر برای نقاط همسایه
- شمال $\mathrm{P}(X_{n+۱} = i, Y_{n+۱} = j + ۱ | = X_n = i, Y_n = j) = \frac{۱}{۴}$
- جنوب $\mathrm{P}(X_{n+۱} = i, Y_{n+۱} = j - ۱ | = X_n = i, Y_n = j) = \frac{۱}{۴}$
- غرب $\mathrm{P}(X_{n+۱} = i - ۱, Y_{n+۱} = j | = X_n = i, Y_n = j) = \frac{۱}{۴}$
- شرق $\mathrm{P}(X_{n+۱} = i + ۱, Y_{n+۱} = j | = X_n = i, Y_n = j) = \frac{۱}{۴}$

ولگشت

فضای d بعدی

$\boldsymbol{e}_i$ بردار یکهٔ d بعدی با مقدار یک در محور i و صفر در بقیهٔ جاها و $i \in \{1, \ldots, d\}$

فرض توزیع شدگی یکسان و مستقل از هم ... $\boldsymbol{X}_۱, \boldsymbol{X}_۲, \boldsymbol{X}_۳,$

ولگشت ساده

$$S_n = \boldsymbol{x} + \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{X}_j$$

$\boldsymbol{x}$ نمایشگر محل در زمان شروع یا $\mathrm{j} = 0$

- معمولا برابر بردار صفر $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{X}_j$ نمایشگر حرکت از زمان j به $j + 1$

ولگشت متقارن

$$\mathrm{P}(\boldsymbol{X}_j = \boldsymbol{e}_i) = P(\boldsymbol{X}_j = -\boldsymbol{e}_i) = \frac{۱}{۲d}, i = ۱, ۲, \ldots, d$$

ولگشت

$$S_n = \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$$

پرسش: ولگشت نوعی زنجیره مارکوفی است؟

- $S_n = S_{n-۱} + X_n, n \geq 1$؟
  - بله
- X_n مستقل از S_n

$$\mathrm{P}(S_n = j | S_{n-۱} = i, \boldsymbol{S_{n-۲}} = \boldsymbol{s}) = P(S_{n-۱} + X_n = j | S_{n-۱} = i, \boldsymbol{S_{n-۲}} = \boldsymbol{s})$$
$$= P(X_n = j - i) = P_{ij}$$

قاعدهٔ جانشینی

ولگشت

قضیه

- $Y_{\mathbb{N}} = Y_۱, Y_۲, \dots, Y_n, \dots$ توزیع یکسان و مستقل از هم
  - همگی مستقل از X_0
- همچنین $X_{\mathbb{N}} = X_۱, X_۲, \dots, X_n, \dots$ به صورت $X_j = f(X_{j-۱}, Y_j)$
- آنگاه $X_{\mathbb{N}}$ زنجیره مارکوفی است با احتمالات انتقالی:

$$P_{ij} = P(f(i, Y_j) = j)$$

فرایند مارکوفی

امکان تعریف کامل فرایند مارکوفی

- ماتریس احتمال انتقال
- و حالت آغازین X_0
  - یا توزیع احتمالی X_0
- استفاده از قاعدهٔ حاصل‌ضرب

$$P(X_0 = i_0) = P_{i_0}$$

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n)$$

$$\begin{aligned}
&P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n\right)\\
&= P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\right)\\
&\times P\left(X_n = i_n | X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\right)\\
&= P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) \times P\left(X_n = i_n | X_{n-1} = i_{n-1}\right)\\
&= P\left(X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}\right) \times P_{i_{n-1},n}\\
&=\\
&\vdots\\
&= P_{i_0} \times P_{i_{0,1}} \times \cdots \times P_{i_{n-2,n-1}} \times P_{i_{n-1,n}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&P\left(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_0 = i_0, X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, \dots, X_n = i_n\right)\\
&= P\left(X_{n+1} = j_1, \dots, X_{n+m} = j_m | X_n = i_n\right)
\end{aligned}$$

ماتریس‌های احتمال انتقالِ چندگامه

تعریف با ماتریس انتقال و توزیع احتمال در لحظهٔ آغاز

هنگام چند انتقال چه؟

$$P_{ij}^{۲} = P(X_{m+۲} = j | X_m = i)$$

- آیا برابر با $P_{ij}^{۲} = P_{ij}P_{ij}$؟
- خیر $P_{ij}^{۲} \neq P_{ij}P_{ij}$

احتمالات انتقال **n**-گامی $P_{ij}^{(n)}$

- احتمال X_{m+n} با داشتن X_m

$$P_{ij}^{(n)} = P(X_{m+n} = j | X_m = i)$$

- خاصیت مارکوفی موجب امکان بیان $P_{ij}^{(n)}$ بر حسب P_{ij}
- یا نوشتن P_{ij}^{m+n} بر اساس P_{ij}^{m} و P_{ij}^{n}
  - معادلات چپمن-کولمولگروف

احتمال انتقالِ دو-گامی

احتمال انتقال در دو گام

$$P_{ij}^{۲} = P(X_{m+۲} = j | X_m = i)$$

استفاده از قانون احتمال کل

$$P_{ij}^{۲} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+۲} = j, X_{m+۱} = k | X_m = i)$$

$$P_{ij}^{۲} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+۲} = j | X_{m+۱} = k, X_m = i)\ \mathrm{P}(X_{m+۱} = k | X_m = i)$$

$$\Longrightarrow P_{ij}^{۲} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+۲} = j | X_{m+۱} = k)\ \mathrm{P}(X_{m+۱} = k | X_m = i)$$

$$\Longrightarrow\ P_{ij}^{۲} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj} P_{ik}$$

احتمال انتقال چندگامی

- استفاده از فرض تغییرناپذیری با زمان و شروع شرط از X_0

$$P_{ij}^{m+n} = P(X_{m+n} = j | X_0 = i)$$

- استفاده از قانون احتمال کل$\Leftarrow$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j, X_m = k | X_0 = i)$$

- استفاده از احتمال شرطی$\Leftarrow$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j | X_m = k, X_0 = i)\ \mathrm{P}(X_m = k | X_0 = i)$$

- X_m زنجیره مارکوفی، پس بلاموضوع شدن $X_0 = i$ در احتمال شرطی نخست$\Leftarrow$

$$\Rightarrow P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P(X_{m+n} = j | X_m = k)\ \mathrm{P}(X_m = k | X_0 = i)$$

$$\Rightarrow P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^{n} P_{ik}^{m}, \forall i, j; n, m \geq 0$$

شهود

$$P_{ij}^{m+n} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^{n} P_{ik}^{m}, \forall i, j; n, m \geq 0$$

شهودی بودن معادلات چپمن-کولمولگروف

رخ دادن زمان m بین زمان 0 و $m + n$

در زمان m زنجیره مارکوف در حالتی $X_m = k$

- P_{ik}^{m} احتمال انتقال از $X_0 = i$ به $X_m = k$
- P_{kj}^{n} احتمال انتقال از $X_m = k$ به $X_{m+n} = j$
- $P_{kj}^{n} P_{ik}^{m}$ احتمال انتقال از $X_0 = i$ به $X_{m+n} = j$ با گذر از $X_m = k$ در زمان m

k هر حالتی می‌تواند باشد

- پس کافی است روی تمامی مقادیر حالت k جمع شود

نمایش ماتریسی معادلات چپمن-کولموگروف

$P^{(m)}$ ماتریس با درایه‌های P_{ij}^{m}

$P^{(n)}$ ماتریس با درایه‌های P_{ij}^{n}

$P^{(m+n)}$ ماتریس با درایه‌های P_{ij}^{m+n}

- درایهٔ (i,j) ضرب ماتریسی $P^{(m)}P^{(n)}$ برابر با $\sum_{k=0}^{\infty} P_{kj}^{n} P_{ik}^{m}$

صورت ماتریسی معادلات چپمن-کولموگروف

$$P^{(m+n)} = P^{(m)}P^{(n)}$$

سخن کوتاه ماتریس انتقال گام $m+n$ حاصلِ ضربِ **m**-گام و **n**-گام است.

محاسبهٔ احتمالات انتقال چندگامی

$m = n = ۱$ یا احتمال انتقال دو گامی

$$P^{(۲)} = PP = P^{۲}$$

پس‌روی بازگشتی از **n**

$$P^{(n)} = P^{(n-۱)}P = P^{(n-۲)}PP = \cdots = P^{n}$$

قضیه

- ماتریس انتقال احتمالات **n**-گامی از توان **n**-اُم ماتریس انتقال حالت بدست می‌آید یا $P^{(n)} = P^{n}$.

ویژگی خاص

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{\infty} P_{kj} P_{ik}^{(n-١)}$$

$$P_{ij}^{(0)} = ? = \begin{cases} ١, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}$$

مثال- پیش‌بینی وضع هوا

شانس باران فردا

- صرفا وابسته به شرایط جوی امروز

احتمال «بارش باران در چهار روز آینده» در صورت بارانی بودن امروز

- $\alpha = ۰.۷$ احتمال بارش فردا به شرط بارش امروز
- $\beta = ۰.۴$ احتمال بارش فردا به شرط عدم بارش امروز

تعریف حالت‌ها

- 0: فرایند در حالت 0 در روز بارش
- ۱: فرایند در حالت ۱ در روز عدم بارش

ایجاد زنجیره مارکوف دو حالتی

احتمال‌های انتقال

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} \alpha & ۱-\alpha \\ \beta & ۱-\beta \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{P} = \begin{bmatrix} ۰.۷ & ۰.۳ \\ ۰.۴ & ۰.۶ \end{bmatrix}$$

$$P^{(۲)} = P^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۶۱ & ۰.۳۹ \\ ۰.۵۲ & ۰.۴۸ \end{bmatrix}$$

$$P^{(۴)} = (P^{۲})^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۵۷۴۹ & ۰.۴۲۵۱ \\ ۰.۵۶۶۸ & ۰.۴۳۳۲ \end{bmatrix}$$

$$P_{00}^{۴} = ۰.۵۷۴۹$$

مثال- تبدیل فرایندی به زنجیره مارکوفی

عدم بارش امروز وابسته به دو روز قبل

- اگر دو روز قبل دارای بارش باران، بارش باران در فردا با احتمال ۰,۷
- اگر امروز بارانی و دیروز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۵
- اگر امروز بدون باران و دیروز بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۴
- اگر دو روز بدون بارش، بارش باران فردا با احتمال ۰,۲

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۷ & 0 & ۰.۳ & 0 \\ ۰.۵ & 0 & ۰.۵ & 0 \\ 0 & ۰.۴ & 0 & ۰.۶ \\ 0 & ۰.۲ & 0 & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

در صورت بارش در روزهای شنبه و یک‌شنبه، احتمال بارش در سه‌شنبه؟

- بارش در سه‌شنبه معادل قرارگیری فرایند در حالت 0 یا ۱
- $P^{۲}_{00} + P^{۲}_{0۱} = ۰.۴۹ + ۰.۱۲ = ۰.۶۱$

$$P^{(۲)} = P^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۴۹ & ۰.۱۲ & ۰.۲۱ & ۰.۱۸ \\ ۰.۳۵ & ۰.۲۰ & ۰.۱۵ & ۰.۳۰ \\ ۰.۲۰ & ۰.۱۲ & ۰.۲۰ & ۰.۴۸ \\ ۰.۱۰ & ۰.۱۶ & ۰.۱۰ & ۰.۶۴ \end{bmatrix}$$

مثال- جابجائی توپ رنگی

توپ‌ها دارای رنگ قرمز ویا آبی

- کیسه‌ای شامل دو توپ
- در هر مرحله توپی به تصادف انتخاب و جایگذاری با توپی جدید
  - احتمال ۰,۸ توپ هم‌رنگ
  - احتمال ۰,۲ توپ با رنگ متضاد
- حالت آغاز دو توپ سرخ
  - احتمال اینکه توپ پنجم انتخابی سرخ باشد
- حل؟ نیاز به تعریف زنجیره مارکوف مناسب
  - X_n تعداد توپ‌های سرخ در کوزه پس از انتخاب n-اُم و جاگذاری متعاقب آن
  - آن‌گاه
    - X_n زنجیره مارکوفی با حالت‌های 0 و ۱ و ۲
    - جدول انتقال حالت؟

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ & 0 \\ ۰.۱ & ۰.۸ & ۰.۱ \\ 0 & ۰.۲ & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

مثال- جابجائی توپ رنگی

- در هر مرحله توپی به تصادف انتخاب و جایگذاری با توپی جدید
  - احتمال ۰,۸ توپ هم‌رنگ
  - احتمال ۰,۲ توپ با رنگ متضاد
- X_n تعداد توپ‌های سرخ در کوزه پس از انتخاب n-اُم و جاگذاری متعاقب آن
  - X_n زنجیره مارکوفی با حالت‌های 0 و ۱ و ۲
  - جدول انتقال حالت؟
  - $P_{۱0}$ یعنی یک توپ سرخ در کوزه به 0 توپ قرمز مبدل گردد
    - جهت انجام این‌کار باید
      - ابتدا توپ قرمز کوزه انتخاب شود (احتمال $\frac{۱}{۲}$؟)
      - سپس با جانشینی با توپ آبی (احتمال ۰.۲؟)
      - پس احتمال $P_{۱0} = \frac{۱}{۲} \times ۰.۲ = ۰.۱$
      - به طریق اولی محاسبهٔ دیگر مقادیر ماتریس انتقال

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ & 0 \\ ۰.۱ & ۰.۸ & ۰.۱ \\ 0 & ۰.۲ & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

مثال- جابجائی توپ رنگی

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ & 0 \\ ۰.۱ & ۰.۸ & ۰.۱ \\ 0 & ۰.۲ & ۰.۸ \end{bmatrix}$$

جهت یافتن احتمال سرخ بودن در انتخاب چهارم، نیاز به بررسی تعداد سرخ‌ها در کوزه پس از انتخاب چهارم؟

- نمایش با $e_۵$

$$P(e_۵ = \text{ق}) = \sum_{i=0}^{۲} P\left(e_۵ = \text{ق} \middle| X_۴ = i\right) P(X_۴ = i | X_0 = ۲)$$
$$= (0)P^۴_{۲0} + (۰.۵)P^۴_{۲۱} + (۱)P^۴_{۲۲} = (۰.۵)P^۴_{۲۱} + (۱)P^۴_{۲۲}$$

- محاسبهٔ $P^۴$
- $P^۴_{۲۱} = ۰.۴۳۵۲$ و $P^۴_{۲۲} = ۰.۴۸۷۲$
- پس $\Leftarrow$
- $P\left(e_۵ = \text{ق}\right) = ۰.۷۰۴۸$

مثال- توزیع در میان کوزه‌ها

هشت کوزه

- توزیع توپ‌ها در میان آن‌ها
- احتمال خالی نبودن دقیقا سه کوزه پس از توزیع ۹ توپ

X_n تعداد کوزه‌های پر پس از توزیع n توپ

- حالت‌های ممکن 0 و ۱ و ۲ و ... و ۸
- احتمالات انتقال
  - $P_{ii} = \frac{i}{۸} = ۱ - P_{ii+۱}, i = \{0,۱,۲,\dots,۸\}$
- احتمال مطلوب $P_{0۳}^{۹}$
  - ادعا $P_{0۳}^{۹} = P_{0۱}P_{۱۳}^{۸}$
  - ادعا $P_{0۱} = ۱$
  - $P_{0۳}^{۹} = P_{۱۳}^{۸}$

مثال- توزیع در میان کوزه‌ها

سوال- احتمال خالی نبودن دقیقا سه کوزه پس از توزیع ۹ توپ

- X_n تعداد کوزه‌های پر پس از توزیع n توپ
  - $P_{ii} = \frac{i}{۸} = ۱ - P_{ii+۱}, i = \{0,۱,۲,\dots,۸\}$
- احتمال مطلوب $P_{0۳}^{۹}$
  - $P_{0۳}^{۹} = P_{۱۳}^{۸}$
- با آغاز از یک کوزهٔ پر شده
- ادعا-هدف رسیدن به سه کوزه پر شده پس از توزیع هشت توپ بعدی؟
- ادعا- از حالت‌های ۴ و ۵ و ۶ و ۷ و ۸ نمی‌توان به حالت ۳ رفت؟
  - بنابراین صرفا نیاز به بررسی حالت‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ جهت یافتن $P_{۱۳}^{۸}$؟
- جدول احتمال انتقال

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۸} & \frac{۷}{۸} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{۲}{۸} & \frac{۶}{۸} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{۳}{۸} & \frac{۵}{۸} \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال- توزیع در میان کوزه‌ها

سوال- احتمال خالی نبودن دقیقا سه کوزه پس از توزیع ۹ توپ

- X_n تعداد کوزه‌های پر پس از توزیع n توپ
  - $P_{ii} = \frac{i}{۸} = ۱ - P_{ii+۱}, i = \{0,۱,۲,\ldots,۸\}$
- احتمال مطلوب $P_{0۳}^{۹} = P_{۱۳}^{۸}$

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۸} & \frac{۷}{۸} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{۲}{۸} & \frac{۶}{۸} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{۳}{۸} & \frac{۵}{۸} \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

$$P^{۴} = \begin{bmatrix} ۰.۰۰۰۲ & ۰.۰۲۵۶ & ۰.۲۵۶۳ & ۰.۷۱۷۸ \\ 0 & ۰.۰۰۳۹ & ۰.۰۹۵۲ & ۰.۹۰۰۹ \\ 0 & 0 & ۰.۰۱۹۸ & ۰.۹۸۰۲ \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

$$P_{۱۳}^{۸} = ۰.۰۰۰۲ \times ۰.۲۵۶۳ + ۰.۰۲۵۶ \times ۰.۰۹۵۲ + ۰.۲۵۶۳ \times ۰.۰۱۹۸ + ۰.۷۱۷۸ \times ۰ = ۰.۰۰۷۵۶$$

مثال- سه شیر متوالی

پرتاب سکه‌های سالم مستقل

- N تعداد پرتاب‌ها تا رسیدن به سه شیر متوالی
- $P(N \leq ۸)$ و $P(N = ۸)$؟

حل- زنجیره مارکوفی با حالت‌های 0 و ۱و ۲ و ۳

- i<3 به معنای ادامه پرتاب‌ها تا رسیدن به سه شیر متوالی
- i=3 رخ دادن سه شیر متوالی
  - ماتریس احتمال انتقال⟸

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 & 0 \\ \frac{۱}{۲} & 0 & \frac{۱}{۲} & 0 \\ \frac{۱}{۲} & 0 & 0 & \frac{۱}{۲} \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال- سه شیر متوالی

- $P(N \le ۸)$ و $P(N = ۸)$؟
  - ماتریس احتمال انتقال ⟸

$$P = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & 0 & 0 \\ \frac{۱}{۲} & 0 & \frac{۱}{۲} & 0 \\ \frac{۱}{۲} & 0 & 0 & \frac{۱}{۲} \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

$$P^{۸} = \begin{bmatrix} \frac{۸۱}{۲۵۶} & \frac{۴۴}{۲۵۶} & \frac{۲۴}{۲۵۶} & \frac{۱۰۷}{۲۵۶} \\ \frac{۶۸}{۲۵۶} & \frac{۳۷}{۲۵۶} & \frac{۲۰}{۲۵۶} & \frac{۱۳۱}{۲۵۶} \\ \frac{۴۴}{۲۵۶} & \frac{۲۴}{۲۵۶} & \frac{۱۳}{۲۵۶} & \frac{۱۷۵}{۲۵۶} \\ 0 & 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

- $P(N \le ۸)$؟
  - $\frac{۱۰۷}{۲۵۶}$
- $P(N = ۸)$؟
  - $N = ۸$ به معنای تا ۷ انتقال سه شیر اتفاق نیفتاده است و حالت پس از هفت انتقال برابر حالت ۲ و پرتاب بعدی شیر می‌آید ⟸

$$P(N = ۸) = \frac{۱}{۲} P_{0۲}^{۷}$$

مثال–

زنجیره مارکوف با حالت‌های ۱,۲,۳,۴,۵

مطلوب است $P(X_۴ = ۲, X_۳ \leq ۲, X_۲ \leq ۲, X_۱ \leq ۲ | X_0 = ۱)$

- به چه معنا؟ با آغاز از حالت ۱ زنجیره در زمان ۴ در حالت ۲ باشد بدون اینکه به حالت‌های $\mathfrak{A} = \{۳,۴,۵\}$ وارد شده باشد.

جهت محاسبه صرفا نیاز به $P_{۱۱}$ و $P_{۱۲}$ و $P_{۲۱}$ و $P_{۲۲}$

فرض $P_{۱۱} = ۰.۳$ و $P_{۱۲} = ۰.۳$ و $P_{۲۱} = ۰.۱$ و $P_{۲۲} = ۰.۲$

می‌توان زنجیره مارکوف را شامل سه حالت ۱,۲,۳ دانست حالت $\mathfrak{A}$ را ۳ نامیده‌ایم. ماتریس

$$Q = \begin{bmatrix} ۰.۳ & ۰.۳ & ۰.۴ \\ ۰.۱ & ۰.۲ & ۰.۷ \\ 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

به دنبال $Q_{۱۲}^{۴}$

$$Q^{۴} = \begin{bmatrix} ۰.۰۲۱۹ & ۰.۰۲۸۵ & ۰.۹۴۹۶ \\ ۰.۰۰۹۵ & ۰.۰۱۲۴ & ۰.۹۷۸۱ \\ 0 & 0 & ۱ \end{bmatrix}$$

مثال

شاد X=0 و غمگین X=1

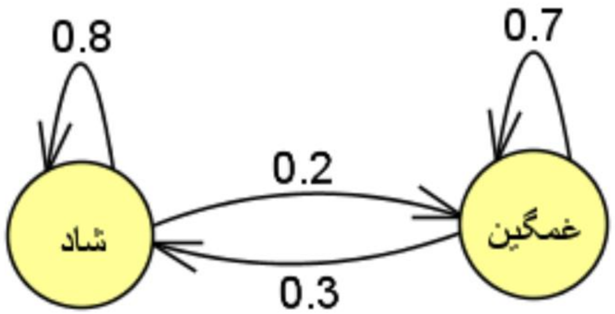
- حال و هوای فردای فرد صرفا از حال و هوای امروز تاثیر می‌پذیرد.

- حالت فردا محتملا شبیه حالت امروز
- ولی غمگین احتمال کمتر برای فردا

$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ \\ ۰.۳ & ۰.۷ \end{bmatrix}$$

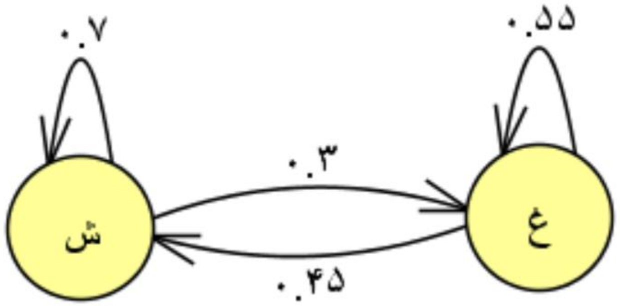
شادی و غم گیتی نمی‌کنند دوام- دوام مثال!

تغییر حال در یک روز



$$P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ \\ ۰.۳ & ۰.۷ \end{bmatrix}$$

احتمال‌های انتقالی بین امروز و پس‌فردا



$$P^{۲} = \begin{bmatrix} ۰.۷ & ۰.۳ \\ ۰.۴۵ & ۰.۵۵ \end{bmatrix}$$

شادی و غم گیتی نمی‌کنند دوام- دوام مثال–دوام!

پس از یک هفته و پس از سی روز

$$P^{30} = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۰۰ & ۰.۴۰۰۰ \\ ۰.۶۰۰۰ & ۰.۴۰۰۰ \end{bmatrix} \qquad P^{7} = \begin{bmatrix} ۰.۶۰۳۱ & ۰.۳۹۶۹ \\ ۰.۵۹۵۳ & ۰.۴۰۴۷ \end{bmatrix}$$

تقریبا برابر

- وجود $\lim_{n\to\infty} P^n$
  - حد منظم

حالت از حالت آغاز مستقل می‌شود.

- منطق
  - شرط آغازین در حافظهٔ تک‌گامی نهایتا فراموش خواهد شد

احتمال غیرشرطی

تاکنون تمامی احتمالات شرطی $P_{ij}^n = P(X_n = j|X_0 = i)$

هم‌چنین نیاز به احتمال غیرشرطی $p_j(n) = (X_n = j)$

- نیاز به مشخص‌کردن شرط آغاز یا احتمال آغاز $p_i(0) = (X_0 = i)$
- استفاده از قانون احتمال کل و تعریف $p_j(n)$ و P_{ij}^n

$$p_j(n) = (X_n = j) = \sum_{i=0}^{\infty} P(X_n = j|X_0 = i)\, \mathrm{P}(X_0 = i)$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} P_{ij}^n p_i(0)$$

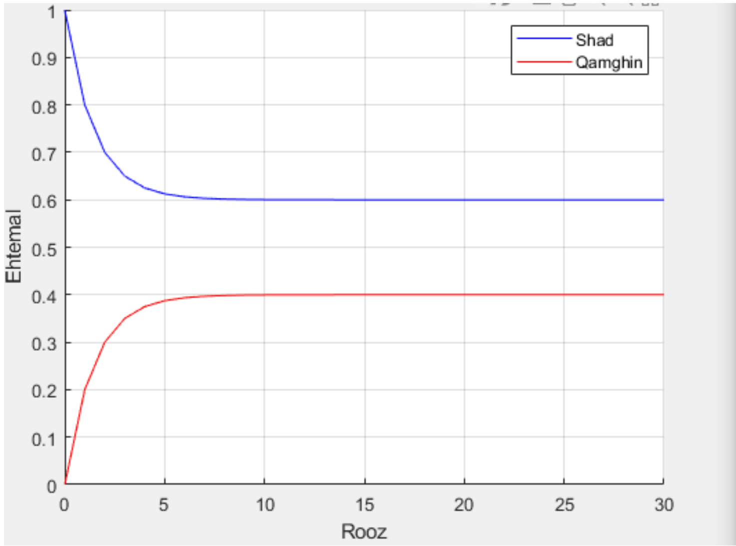
صورت ماتریسی $\boldsymbol{p}(n) = [p_۱(n), p_۲(n), \dots]^T$

$$\boldsymbol{p}(n) = (P^n)^T \boldsymbol{p}(0)$$

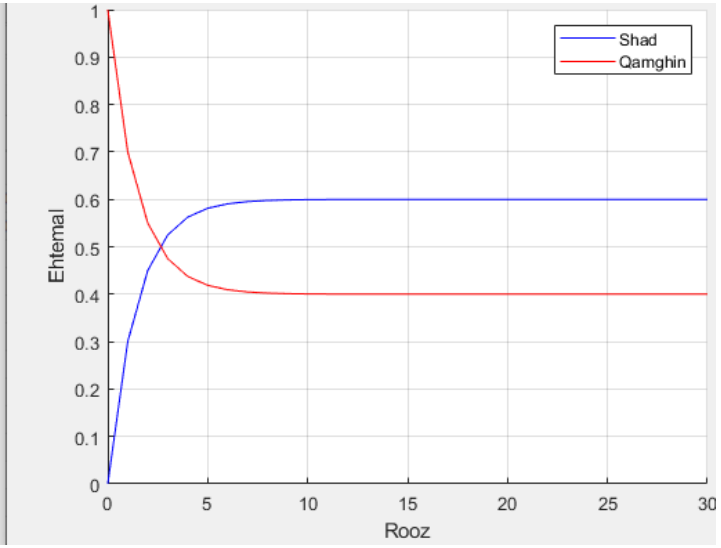
شادی و غم گیتی نمی‌کنند دوام- دوام مثال!

ماتریس احتمال انتقال $P = \begin{bmatrix} ۰.۸ & ۰.۲ \\ ۰.۳ & ۰.۷ \end{bmatrix}$

$\boldsymbol{p}(0) = [۱\ 0]^T$



$\boldsymbol{p}(0) = [0\ ۱]^T$



با افزایش N احتمال مستقل از حالت آغاز

منابع

[پینسکی]

[راس]

[زانلا]

[هایز] B. Hayes, “First Links in the Markov Chain,” *American Scientist*, V. 101, pp. 92-97, Mar-Apr 2013.

[Mateos] G. Mateos, “ECE440 - Introduction to Random Processes,” http://www2.ece.rochester.edu/~gmateosb/ECE440.html

[Ribeiro] A. Ribeiro, “ESE 303 - Stochastic Systems Analysis and Simulation,” https://ese303.seas.upenn.edu/